3　方程式・不等式の解法

A

17

与式を x について整理すると，$4(a-2)x-a(a-2)(a-3)>0$

よって，$4(a-2)\left\{x-\dfrac{a(a-3)}{4}\right\}>0$

$a>2$ のとき

$x>\dfrac{a(a-3)}{4}$

この解が $x>1$ だから，$\dfrac{a(a-3)}{4}=1$

これより $a^2-3a-4=0$　$\therefore (a+1)(a-4)=0$　$\therefore a=4$

$a<2$ のとき

$x<\dfrac{a(a-3)}{4}$ となり不適。

よって，求める a の値は 4

18

(1)

$y=x+\dfrac{1}{x}$ より $x\neq 0$

よって，

$$\begin{aligned}2x^4-9x^3-x^2-9x+2&=x^2\left(2x^2-9x-1-\frac{9}{x}+\frac{2}{x^2}\right)\\&=x^2\left\{2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-9\left(x+\frac{1}{x}\right)-1\right\}\\&=x^2\left[2\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\right\}-9\left(x+\frac{1}{x}\right)-1\right]\\&=x^2\left\{2\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-9\left(x+\frac{1}{x}\right)-5\right\}\\&=x^2\left(2y^2-9y-5\right)\end{aligned}$$

より，$2x^4-9x^3-x^2-9x+2=0$ のとき $2y^2-9y-5=0$

(2)

$2y^2-9y-5=0$ および $2y^2-9y-5=(2y+1)(y-5)$ より，$2y+1=0$ または $y-5=0$

$2y+1=0$ のとき

$2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+1=0$ より，$\dfrac{2x^2+x+2}{x}=0$

よって，$2x^2+x+2=0 \quad \therefore x=\dfrac{-1\pm\sqrt{15}i}{4}$

$y-5=0$ のとき

$x+\dfrac{1}{x}-5=0$ より，$\dfrac{x^2-5x+1}{x}=0$

よって，$x^2-5x+1=0 \quad \therefore x=\dfrac{5\pm\sqrt{21}}{2}$

以上より，求める解は，$\dfrac{-1\pm\sqrt{15}i}{4},\ \dfrac{5\pm\sqrt{21}}{2}$

19

(1)

$||x-1|-5|<3 \Leftrightarrow -3<|x-1|-5<3$

$\Leftrightarrow 2<|x-1|<8$

$\Leftrightarrow 2<|x-1|$ かつ $|x-1|<8$

より，

（$x-1<-2$ または $2<x-1$）かつ $-8<x-1<8$

すなわち（$x<-1$ または $3<x$）かつ $-7<x<9$

よって，$-7<x<-1$ または $3<x<9$

ゆえに，$||x-1|-5|<3$ を満たす整数 x は $-6,\ -5,\ -4,\ -3,\ -2,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8$ の 10 個

(2)

$|4x^2-1|-|6x^2-x-2|\geq 0$

$|4x^2-1|=|(2x+1)(2x-1)|=|2x+1||2x-1|$

$|6x^2-x-2|=|(2x+1)(3x-2)|=|2x+1||3x-2|$

より，

$|2x+1|\{|2x-1|-|3x-2|\}\geq 0$

よって，$2x+1=0$ すなわち $x=-\dfrac{1}{2}$ または $|2x-1|\geq|3x-2|$

$|2x-1|\geq|3x-2|$ については，$|2x-1|^2\geq|3x-2|^2$ より，$(2x-1)^2\geq(3x-2)^2$

よって，$\{(2x-1)+(3x-2)\}\{(2x-1)-(3x-2)\}=(5x-3)(-x+1)\geq 0 \quad \therefore \dfrac{3}{5}\leq x\leq 1$

以上より，$x=-\frac{1}{2},\ \frac{3}{5}\leq x\leq 1$

補足

$y=\left|4x^2-1\right|$ と $y=\left|6x^2-x-2\right|$ のグラフを利用して解いてもよい。

20

(1)

$x^2=4x+2y$ ・・・①　　$y^2=2x+4y$ ・・・②　とすると，

①−②より，$x^2-y^2=2x-2y$　$\therefore (x-y)(x+y-2)=0$

ゆえに，$x-y=0$ または $x+y-2=0$

$x-y=0$ すなわち $y=x$ のとき

①の y に x を代入し整理すると $x(x-6)=0$　$\therefore x=0,\ 6$

これと $y=x$ より，$(x,\ y)=(0,\ 0),\ (6,\ 6)$

$x+y-2=0$ すなわち $y=-x+2$ のとき

①の y に $-x+2$ を代入し整理すると $x^2-2x-4=0$　$\therefore x=1\pm\sqrt{5}$

これと $y=-x+2$ より，$(x,\ y)=\left(1+\sqrt{5},\ 1-\sqrt{5}\right),\ \left(1-\sqrt{5},\ 1+\sqrt{5}\right)9$

以上より，$(x,\ y)=(0,\ 0),\ (6,\ 6)\left(1+\sqrt{5},\ 1-\sqrt{5}\right),\ \left(1-\sqrt{5},\ 1+\sqrt{5}\right)$

(2)

与式は対称式だから，$x+y$ と xy（基本対称式）で表すと，

それぞれの与式は

$(x+y)^2+xy=11$　すなわち　$(x+y)^2+xy-11=0$ ・・・①

$(x+y)-xy=9$　すなわち　$xy=(x+y)-9$ ・・・②

②を①に代入し整理すると，$(x+y)^2+(x+y)-20=0$ より，$\{(x+y)-4\}\{(x+y)+5\}=0$

$\therefore x+y=4,\ -5$

これと②より，$(x+y,\ xy)=(4,\ -5),\ (-5,\ -14)$

$(x+y,\ xy)=(4,\ -5)$ のとき

$x,\ y$ は t についての 2 次方程式 $t^2-4t-5=0$ の解である。

これと $t^2-4t-5=(t+1)(t-5)$ および $x\leq y$ より，$(x,\ y)=(-1,\ 5)$

$(x+y,\ xy)=(-5,\ -14)$ のとき

$x,\ y$ は t についての 2 次方程式 $t^2+5t-14=0$ の解である。

これと $t^2+5t-14=(t-2)(t+7)$ および $x\leq y$ より，$(x,\ y)=(-7,\ 2)$

以上より，$(x,\ y)=(-1,\ 5),\ (-7,\ 2)$

21

$$\begin{cases} x^2-(a+b^2)x-3a+a^2=0 \\ x^2+2ax+a^2+b^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-(a+b^2)x-3a+a^2=0 \\ x^2+2ax+a^2+b^2-\{x^2-(a+b^2)x-3a+a^2\}=0-0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-(a+b^2)x-3a+a^2=0 \\ (3a+b^2)(x+1)=0 \end{cases}$$

$(3a+b^2)(x+1)=0$ より，$x=-1$ または $3a+b^2=0$

$x=-1$ が共通解のとき

$x^2-(a+b^2)x-3a+a^2=0$ を満たすから，$a^2-2a+1+b^2=0$ すなわち $(a-1)^2+b^2=0$

よって，$a=1,\ b=0$

$a>0$ を満たす。

$3a+b^2=0$ のとき

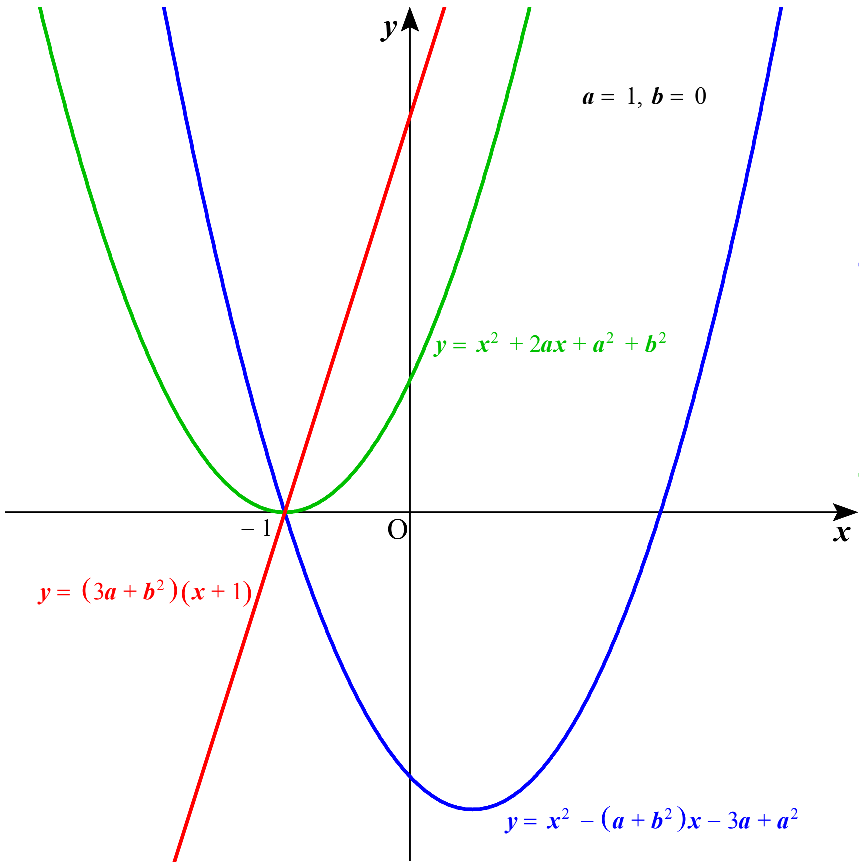
$b^2\geq 0$ より $a\leq 0$ ところが条件より $a>0$

よって，不適。

以上より，

$a=1,\ b=0$ のとき共通解 $x=-1$ をもつ。

補足



22

(1)

与式および

$$\begin{aligned} x^3-(a+2)x^2+(2a-3)x+3a &= -(x^2-2x-3)a+x^3-2x^2-3x \\ &= -(x+1)(x-3)a+x(x+1)(x-3) \\ &= (x+1)(x-3)(x-a) \end{aligned}$$

より，

$(x+1)(x-3)(x-a) \leq 0$

よって，

$a<-1$ のとき

$x \leq a$， $-1 \leq x \leq 3$

$a=-1$ のとき

$x \leq 3$

$-1<a<3$ のとき

$x \leq -1$， $a \leq x \leq 3$

$a=3$ のとき

$x \leq -1$， $x=3$

$3<a$ のとき

$x \leq -1$， $3 \leq x \leq a$

(2)

$a=2$ のとき

$2x-2 \geq 0 \quad \therefore x \geq 1$

続いて， $a \neq 2$ の場合で考える。

$$\begin{aligned} (a-2)x^2+(4-a)x-2 &= (x-1)\{(a-2)x+2\} \\ &= (a-2)(x-1)\left(x+\frac{2}{a-2}\right) \end{aligned}$$

より， $(a-2)(x-1)\left(x+\dfrac{2}{a-2}\right) \geq 0$

$1=-\dfrac{2}{a-2}$ すなわち $a=0$ のとき

$-2(x-1)^2 \geq 0$ より， $x=1$

$a<0$ のとき

$a-2<0$ より， $(x-1)\left(x+\dfrac{2}{a-2}\right) \leq 0$

これと $-\dfrac{2}{a-2}<1$ より， $-\dfrac{2}{a-2} \leq x \leq 1$

$0<a<2$ のとき

$a-2<0$ より，$(x-1)\left(x+\dfrac{2}{a-2}\right)\leq 0$

これと $-\dfrac{2}{a-2}>1$ より，$1\leq x\leq -\dfrac{2}{a-2}$

$2<a$ のとき

$a-2>0$ より，$(x-1)\left(x+\dfrac{2}{a-2}\right)\geq 0$

これと $-\dfrac{2}{a-2}<1$ より，$x\leq -\dfrac{2}{a-2},\ 1\leq x$

以上より，

$a<0$ のとき　$-\dfrac{2}{a-2}\leq x\leq 1$

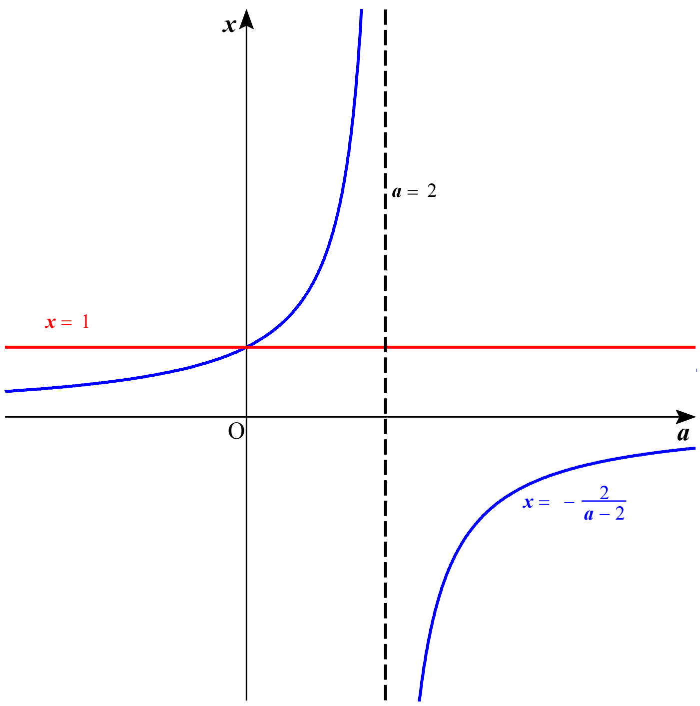
$a=0$ のとき　$x=1$

$0<a<2$ のとき　$1\leq x\leq -\dfrac{2}{a-2}$

$a=2$ のとき　$1\leq x$

$2<a$ のとき　$x\leq -\dfrac{2}{a-2},\ 1\leq x$

補足：1 と $-\dfrac{2}{a-2}$ の大小関係をあらかじめグラフで調べておくと楽



23

(1)

$x^2-\dfrac{4}{5}=x$ より，$\dfrac{1}{5}\left(5x^2-5x-4\right)=0$ $\therefore x=\dfrac{5\pm\sqrt{105}}{10}$

$\alpha<\beta$ より，$\alpha=\dfrac{5-\sqrt{105}}{10}$, $\beta=\dfrac{5+\sqrt{105}}{10}$

α は $f(x)=x$ の解だから，$f(f(\alpha))=f(\alpha)=\alpha$ $\therefore f(f(\alpha))=\dfrac{5-\sqrt{105}}{10}$

(2)

$$
\begin{aligned}
f(f(x))&=\{f(x)\}^2-\frac{4}{5}\\
&=\left(x^2-\frac{4}{5}\right)^2-\frac{4}{5}\\
&=x^4-\frac{8}{5}x^2-\frac{4}{25}
\end{aligned}
$$

より，

$$f(f(x))=x \Leftrightarrow x^4-\frac{8}{5}x^2-\frac{4}{25}=x$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{25}\left(25x^4-40x^2-25x-4\right)=0$$

$\therefore 25x^4-40x^2-25x-4=0$

$f(f(x))=x$ は $\alpha,\ \beta$ を解にもつから，$25x^4-40x^2-25x-4=0$ は $5x^2-5x-4$ で割り切れる。

そこで，割り算を実行すると，$25x^4-40x^2-25x-4=\left(5x^2-5x-4\right)\left(5x^2+5x+1\right)$

$\therefore \left(5x^2-5x-4\right)\left(5x^2+5x+1\right)=0$

これを解くと $x=\dfrac{5\pm\sqrt{105}}{10},\ \dfrac{-5\pm\sqrt{5}}{10}$

24

(1)

解法 1

$4x-3[x]=0$ より，$x=\dfrac{3[x]}{4}$　・・・①

条件より，$[x]\leq x<[x]+1$

よって，$4[x]\leq 4x<4[x]+4$

これより，$4[x]-3[x]\leq 4x-3[x]<4[x]+4-3[x]$　すなわち $[x]\leq 4x-3[x]<[x]+4$

よって，$4x-3[x]=0$ のとき，$[x]\leq 0<[x]+4$　すなわち $-4<[x]\leq 0$

$\therefore [x]=-3,\ -2,\ -1,\ 0$　・・・②

①，②より，$x=-\dfrac{9}{4},\ -\dfrac{3}{2},\ -\dfrac{3}{4},\ 0$

解法 2

$4x-3[x]=0$ より，$x=\dfrac{3[x]}{4}$　・・・①

条件より，$x-1<[x]\leq x$ だから，$-3x\leq -3[x]<-3x+3$

これより，$x\leq 4x-3[x]<x+3$

したがって，$4x-3[x]=0$ のとき，$x\leq 0<x+3$　すなわち $-3<x\leq 0$

よって，$[x]=-3,\ -2,\ -1,\ 0$　・・・②

①，②より，$x=-\dfrac{9}{4},\ -\dfrac{3}{2},\ -\dfrac{3}{4},\ 0$

(2)

$3x-1<[3x]\leq 3x$ より，$x^2-3x+3x-1<x^2-3x+[3x]\leq x^2-3x+3x$

すなわち $x^2-1<x^2-3x+[3x]\leq x^2$

よって，$x^2-3x+[3x]=0$ のとき，$x^2-1<0\leq x^2$　すなわち　$0\leq x^2<1$

これより，$-1<x<1$　・・・③

よって，$-3<3x<3$ より，$[3x]=-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2$

したがって，$x^2-3x+[3x]=0$ の実数解は,

$x^2-3x-3=0$，$x^2-3x-2=0$，$x^2-3x-1=0$，$x^2-3x=0$，$x^2-3x+1=0$，$x^2-3x+2=0$

の 5 つの方程式の実数解で，③を満たすものである。

よって，$x=\dfrac{3-\sqrt{21}}{2},\ \dfrac{3-\sqrt{17}}{2},\ \dfrac{3-\sqrt{13}}{2},\ 0,\ \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$